

Wolfgang Hugemann*

Die eindimensionale Kollision

als dreidimensionale Abbildung

Zusammenfassung

Die mathematischen Verfahren der Kollisionsmechanik kranken in der Regel daran, daß die Toleranzen der Eingabeparameter nicht in geeigneter Weise berücksichtigt werden. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb erstmals ein strenges mathematisches Verfahren vorgestellt, mit Hilfe dessen sich die Lösungsmenge für eine eindimensionale Kollision geschlossen ermitteln läßt.

Summary

The mathematical procedures in the mechanics of collision suffer from the fact that they offer no suitable way of taking the tolerances of the input parameters into account. This paper presents the first rigid mathematical procedure by means of which the solution set can be calculated in a whole.

1 Einleitung

Es mag seltsam anmuten, wenn jemand es heutzutage noch wagt, eine theoretische Abhandlung über eindimensionale Stoßvorgänge zu veröffentlichen, wo doch bereits mehrere Computerprogramme erhältlich sind, die die Analyse zweidimensionaler Kollisionen ermöglichen. Beim EES-Verfahren beispielsweise wird zwar zu jedem Satz von Eingabeparametern eine geschlossene Lösung erarbeitet, doch fällt dem Benutzer des Programms die Aufgabe zu, die möglichen Varianzen der Lösung durch Variation der Eingangsparameter zu ertasten. Der hier vorgestellte Ansatz stellt demgegenüber eine völlig neue Betrachtungsweise in der Kollisionsmechanik dar. Mittels der im folgenden dargelegten Vorgehensweise wird die komplette Lösungsvielfalt, die sich aus den möglichen Kombinationen unterschiedlicher Eingangsparameter ergibt, »auf einen Schlag« berechnet.

Interessiert man sich nur für die Maximal- und Minimalwerte der Kollisionsgeschwindigkeit, so sind diese mittels einfacher Rechenvorschriften zu ermitteln. Die Intention des Aufsatzes liegt deshalb nicht darin, ein neues Rechenverfahren für eindimensionale Kollisionsvorgänge vorzustellen. Die neue Betrachtungsweise von Kollisionsvorgängen soll vielmehr exemplarisch im überschaubaren Rahmen eindimensionaler Kollisionen vorgestellt und erläutert werden. In absehbarer Zeit soll der Lösungsgedanke auf zweidimensionale Kollisionereignisse übertragen werden.

2 Vorüberlegungen

Vor der Darlegung des Lösungsgedankens ist es sinnvoll, einige Überlegungen vorauszuschicken, die im weiteren Verlauf helfen werden, unter mehreren denkbaren Lösungen die richtige auszuwählen. In [1] wurde bereits festgestellt, daß zwischen der Differenzgeschwindigkeit vor der Kollision

$$\Delta v = v_1 - v_2 \quad (1)$$

und der Differenzgeschwindigkeit nach der Kollision

$$\Delta v' = v_1' - v_2' \quad (2)$$

im eindimensionalen Fall folgende Beziehung besteht

$$\Delta v^2 - \Delta v'^2 = \bar{v}_e^2 \quad (3)$$

mit

$$\bar{v}_e = \sqrt{\frac{2 \Delta E}{m^*}} \quad (4)$$

und

$$m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

Dabei stellt ΔE den in Verformungsarbeit umgewandelten Energieanteil dar. Mit v_{e1}, v_{e2} als energie-äquivalente Geschwindigkeit der stoßbeteiligten Masse m_1, m_2 gilt

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_{e1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{e2}^2 \quad (6)$$

Der Parameter m^* wird als relative Masse bezeichnet. Der Parameter \bar{v}_e soll als energie-äquivalente Relativgeschwindigkeit bezeichnet werden, da sich für den plastischen Stoß aus

$$\Delta v' = 0 \quad (7)$$

der Zusammenhang

$$\Delta v = \bar{v}_e \quad (8)$$

ergibt.

Da es sich bei Gl. (3) um eine quadratische Gleichung handelt, existieren zu jeder Differenzgeschwindigkeit nach der Kollision $\Delta v'$ zwei verschiedene Lösungen für die Differenzgeschwindigkeit vor der Kollision

$$\Delta v = \pm \sqrt{\bar{v}_e^2 + \Delta v'^2} \quad (9)$$

von denen, bezogen auf ein konkretes Unfallereignis, nur eine die richtige sein kann. Dieses Problem ist seit langem aus der Anwendung des EES-Verfahrens [2, 3] bekannt und es ist bereits eine Reihe von Lösungsvorschlägen unterbreitet worden [4, 5, 6].

Da das Problem auch für die nachfolgenden Betrachtungen essentiell ist, soll nochmals eine anschauliche Lösung präsentiert werden. Gl. (3) beschreibt eine Hyperbel, Bild 1¹, mit den Asymptoten

$$\Delta v = -\Delta v' \quad (10)$$

und

$$\Delta v = \Delta v' \quad (11)$$

Gl. (10) beschreibt den Grenzfall eines voll elastischen Stoßes, Gl. (11) den extremen Streifstoß, bei dem keine Geschwindigkeitsänderung erfolgt. Der Spezialfall Gl. (7) beschreibt den vollplastischen Stoß.

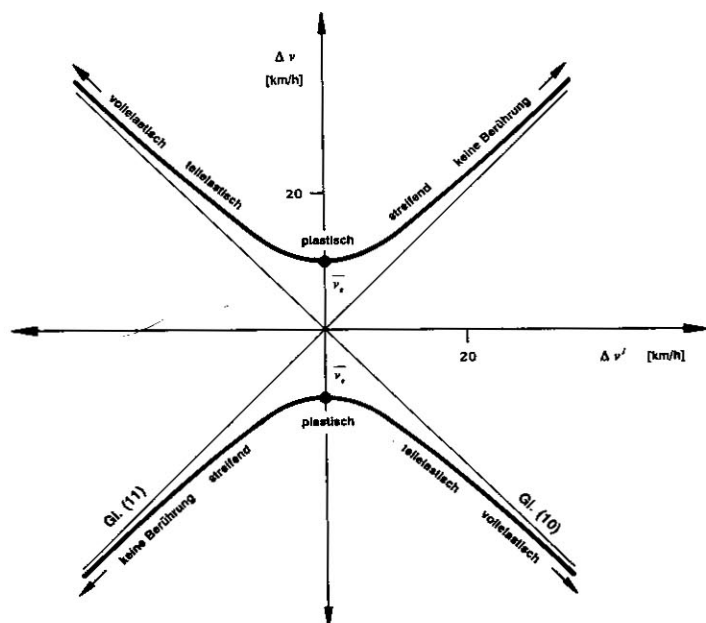


Bild 1 Beziehung zwischen den Differenzgeschwindigkeiten vor und nach dem Stoß
Fig. 1 Relation between closing impact speed and difference of post-crash-velocities

*Dipl.-Ing. Wolfgang Hugemann, Sachverständiger im Ing.-Büro Schimmelpfennig und Becke, Münsterstr. 101, 4400 Münster-Wolbeck

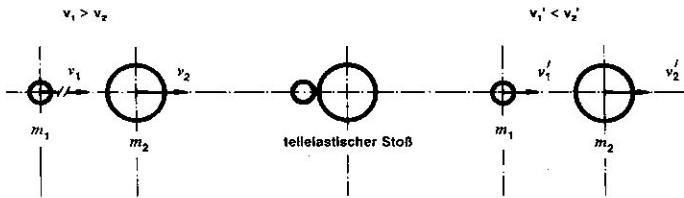


Bild 2a Teilelastischer Stoß
Fig. 2a Partial-elastic impact

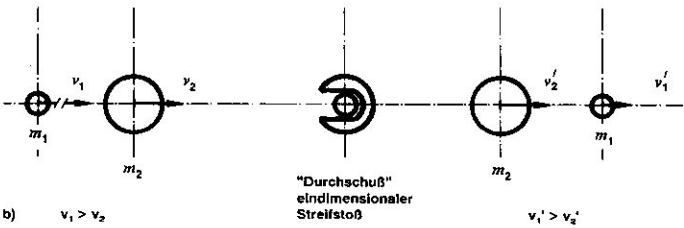


Bild 2b Streifender Stoß
Fig. 2b Scarping impact

Den prinzipiellen Unterschied zwischen einem teilelastischen und einem streifenden Stoß illustriert **Bild 2**. In beiden Fällen handelt es sich bei der stoßenden Masse m_1 vor dem Stoß um den schnelleren der beiden Körper. In **Bild 2 a** prallt die Masse m_1 beim Stoß teilelastisch mit der Masse m_2 zusammen; nach dem Stoß ist m_2 die schnellere der beiden Massen. Einen streifenden Stoß kann man sich im echt eindimensionalen Fall nur als »Durchschuß« vorstellen, **Bild 2 b**, bei dem die Masse m_2 von der Masse durchdrungen wird. Während dieser Durchdringung baut die Masse m_1 zwar Geschwindigkeit ab, ist nach dem Stoß aber immer noch schneller als die Masse m_2 .

Soll die Zuordnung der Punkte zu der Stoßausprägung – elastisch oder streifend – erhalten bleiben, so besitzt die Hyperbel nur eine Symmetrie, die Punktsymmetrie zum Ursprung. Diese Symmetrie ist eine Folge der Symmetrie der Erhaltungsgleichungen bezüglich einer Vertauschung der Indizes »1« und »2«, vgl. auch [7]. Ein Vertauschen der Indizes hat eine Vorzeichenumkehr sowohl bei Δv als auch bei $\Delta v'$ zur Folge, was einer Spiegelung am Ursprung entspricht.

Gemäß Gl. (9) liegen beide Hyperbel-Äste spiegelbildlich zur $\Delta v'$ -Achse und unterscheiden sich lediglich im Vorzeichen. Der Vorzeichenwechsel entspricht dabei dem Wechsel zwischen teilelastischem und streifendem Stoß. Wie man leicht sieht, gibt es mehrere Möglichkeiten, die sich durch die Symmetrie der Erhaltungsgleichungen ergebende Doppeldeutigkeiten durch Konventionen auszuräumen

1. Man legt fest, daß die Indizes so zu wählen sind, daß $\Delta v > 0$ gilt. (Dies ist die übliche Konvention). In diesem Fall ist stets das positive Vorzeichen in Gl. (9) zu wählen; man bewegt sich auf dem oberen Ast der Parabel. Negative Werte von $\Delta v'$ entsprechen teilelastischen Stößen, positive Werte von $\Delta v'$ streifenden Stößen.
2. Analog zu 1. kann man die Konvention so festlegen, daß $\Delta v < 0$ gilt und sich auf dem unteren Ast der Hyperbel bewegt.
3. Man legt fest, daß $\Delta v' < 0$ zu gelten habe. In diesem Fall bewegt man sich in der linken Halbebene. Positive Werte der Wurzel entsprechen teilelastischen Stößen, negative Werte entsprechen streifenden Stößen.
4. Analog zu 3. kann $\Delta v' > 0$ als Konvention festgelegt werden, so daß man sich in der rechten Halbebene bewegt.

Ganz gleich, welche der möglichen Konventionen man wählt, muß vor der Kollisionsanalyse bereits entschieden werden, ob es sich um einen teilelastischen oder streifenden Stoß gehandelt hat, da nur dann eine eindeutige Lösung erzielt wird. Auf der Grundlage der Erhaltungssätze ist diese Entscheidung nicht zu fällen [7], hier müssen andere Entscheidungskriterien, wie beispielsweise Schadenausprägung oder Endlagen der Fahrzeuge, herangezogen werden. Unter dieser Prämisse ergibt sich aus den Erhaltungssätzen unter Berücksichtigung der Vorzeichenkonvention eine eindeutige Lösung.

Im folgenden soll die Vorzeichenkonvention 1. verwendet werden, da sie im Hinblick auf die Anwendung auf Straßenverkehrsunfälle die prakti-

kabelste ist, weil die Fahrrichtungen der Fahrzeuge vor dem Unfall in der Regel bekannt sind.

Die Quintessenz dieser Vorüberlegungen, daß sich mittels einer Vorzeichenkonvention und der Festlegung der Stoßausprägung vier denkbare Lösungen auf eine einzige reduzieren lassen, ist für die nun folgende Herleitung von grundlegender Bedeutung.

3 Entwicklung des Lösungsgedankens

Legt man die Stoßausprägung – teilelastisch oder streifend – im voraus fest, so läßt sich mittels Impuls-

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (12)$$

und Energiesatz

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 + m^* v_e'^2 \quad (13)$$

bei festen v_e jeder Kombination der Kollisionsausgangsgeschwindigkeiten v_1', v_2' genaue eine Kombination der Kollisionseingangsgeschwindigkeiten v_1, v_2 zuordnen. Man kann die Gl. (12) und (13) daher auch als eine Abbildungsvorschrift begreifen, die die v_1', v_2' -Ebene auf die v_1, v_2 -Ebene abbildet, **Bild 3**.

Üblicherweise sind die über die Auslaufanalyse berechneten Kollisionsausgangsgeschwindigkeiten toleranzbehaftet. Für beide Stoßausgangsgeschwindigkeiten gibt es eine Unter- und Obergrenze, die mit den Indizes l (low) und h (high) bezeichnet werden sollen. Es gilt

$$v_{2l}' \leq v_2' \leq v_{2h}' \quad (14)$$

und

$$v_{1l}' \leq v_1' \leq v_{1h}' \quad (15)$$

Durch die Bedingungen Gl. (14) und (15) wird in der v_1', v_2' -Ebene ein Rechteck aufgespannt, **Bild 4**. Bildet man dieses Rechteck mittels der Erhaltungsgleichungen (12) und (13) auf die v_1, v_2 -Ebene ab, so stellt die Bildfigur die vollständige Menge denkbarer Lösungen dar.

Es stellt sich zunächst die Frage, wie das Bild des Rechtecks Gl. (14) und (15) im Prinzip aussieht. Derartige Fragen zu allgemeinen Eigenschaften eines Bildobjektes in bezug zu den Eigenschaften des Originals werden von einem speziellen Zweig der Mathematik, der Topologie, beantwortet. Dieser Zweig der Mathematik wird in der üblichen Ingenieurausbildung nicht einmal am Rande behandelt.

Die oben gestellte Frage läßt sich jedoch vergleichsweise anschaulich beantworten, ohne daß Vorkenntnisse in Topologie erforderlich sind.

Bezüglich der Abbildung Gl. (12) und (13) läßt sich die wichtige Eigenschaft feststellen, daß diese **umkehrbar eindeutig (bijektiv)** und **stetig** ist. Mit anderen Worten: Man kann zu jeder Kombination von v_1', v_2' genau eine Kombination v_1, v_2 berechnen und umgekehrt. Da die Natur im Rahmen der uns im Alltag begegnenden Größenordnungen keine Sprünge macht, werden kleine Veränderungen der Eingabeparameter v_1', v_2' auch nur zu kleinen Veränderungen der berechneten Werte v_1, v_2 führen und vice versa. Genau dies ist die anschauliche Umschreibung des mathematischen Stetigkeitsbegriffes. Eine **umkehrbar eindeutige**,

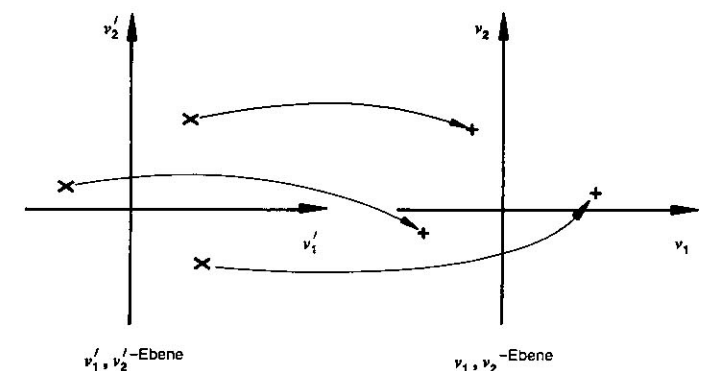


Bild 3 Abbildung der v_1', v_2' auf die v_1, v_2 -Ebene
Fig. 3 Mapping of v_1', v_2' -plane to the v_1, v_2 -plane

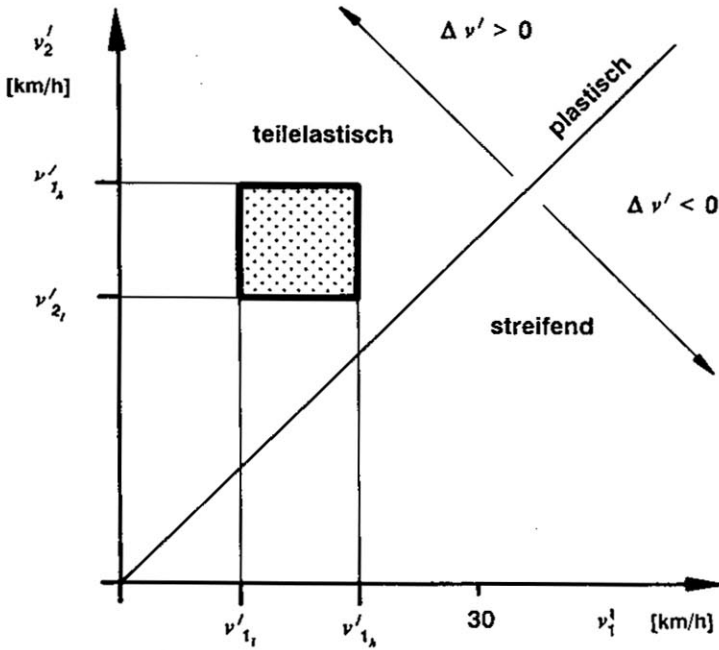


Bild 4 Zweidimensionales Toleranzgebiet der Eingangsparameter
Fig. 4 Two-dimensional tolerance-region of the input parameters

stetige Abbildung wird als topologische Abbildung bezeichnet. Hier zeigt sich auch die Wichtigkeit der Vorüberlegungen des letzten Abschnitts, da die Abbildung ohne Festlegung der Stoßausprägung und Vorzeichenkonvention nicht umkehrbar eindeutig wäre.

Die durch die Bedingungen Gln. (14) und (15) beschriebene Punktmenge besitzt eine Reihe topologischer Eigenschaften. Sie ist zunächst **zusammenhängend**, was im wörtlichen Sinne aufzufassen ist. Die Menge besteht sozusagen »aus einem Stück«. Sie ist darüber hinaus **einfach zusammenhängend**, was anschaulich bedeutet, daß das Viereck keine »Löcher« hat. Das Gebiet ist räumlich begrenzt, also **beschränkt**, und des weiteren **abgeschlossen**, was sagen will, daß der Rand dazugehört. Die Eigenschaft »beschränkt und abgeschlossen« wird in der Topologie mit dem Begriff »kompakt« bezeichnet.

Die genannten Eigenschaften der Punktmenge (des Rechtecks) sind **topologische Invarianten**; sie bleiben bei der topologischen Abbildung Gln. (12) und (13) erhalten. Des weiteren läßt sich feststellen, daß der Rand der Punktmenge, der durch die Seiten des Rechtecks gebildet wird, auf den Rand der Bildmenge abgebildet wird. Punkte, die im Innern des Rechtecks liegen, werden in das Innere des Bildes abgebildet. Die Eigenschaften **Randpunkt** und **Innerer Punkt** sind nämlich ebenfalls topologische Invarianten.

Dieser kurze Ausflug in die Topologie bringt damit eine wichtige Erkenntnis:

Um das Bild des Rechtecks zu ermitteln, genügt es, die Seiten der Abbildung Gln. (12) und (13) zu unterziehen. Das Innere des Rechtecks wird in die so ermittelte Umrandung abgebildet. Eine weiterführende, aber dennoch anschauliche Einführung in die Topologie findet man beispielsweise in [8].

4 Mathematische Ausformulierung

Die zur v_2' -Achse parallelen Seiten des Rechtecks Gln. (14) und (15) werden durch die Bedingung

$$v_1' \doteq v_{10}' = \text{konst.} \quad (16)$$

beschrieben, wobei der andere Parameter v_2' beliebig innerhalb der durch die Gl. (14) vorgegebenen Grenzen läuft. Analoges gilt für die zur v_1' -Achse parallelen Seiten.

Gesucht wird der funktionale Zusammenhang $v_2 = f(v_1)$, der das Bild dieser Geraden in der v_1, v_2 -Ebene beschreibt. Im Gegensatz zur üblichen Vorgehensweise bei der Berechnung muß dabei so vorgegangen

werden, daß jeweils der frei wählbare Parameter – v_1' oder v_2' – aus Gln. (12) und (13) eliminiert wird.

Nach einigem Umformen erhält man die Gleichung

$$v_2 = \frac{1}{2} \left[(1 - \mu) v_1 + (1 + \mu) v_{10}' - \frac{v_e^{-2}}{1 + \mu} \frac{1}{v_1 - v_{10}'} \right] \quad (17)$$

und analog

$$v_1 = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) v_2 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) v_{20}' - \frac{v_e^{-2}}{1 + \frac{1}{\mu}} \frac{1}{v_2 - v_{20}'} \right] \quad (18)$$

mit

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \quad (19)$$

Die Gln. (17) und (18) lassen sich auch als

$$(v_2 - v_{10}') = \frac{1}{2} \left[(1 - \mu) (v_1 - v_{10}') - \frac{v_e^{-2}}{1 + \mu} \frac{1}{(v_1 - v_{10}')} \right] \quad (20)$$

und

$$(v_1 - v_{20}') = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) (v_2 - v_{20}') - \frac{v_e^{-2}}{1 + \frac{1}{\mu}} \frac{1}{(v_2 - v_{20}')} \right] \quad (21)$$

formulieren. Diese Schreibweise läßt manche Eigenschaften leichter erkennen.

Die Gln. (17) und (18) beschreiben zwei Hyperbeln, Bild 5, die in Bild 5 a die Asymptoten

$$v_1 = v_{10}' \quad (22)$$

und

$$v_2 = \frac{1}{2} \left[(1 - \mu) v_1 + (1 + \mu) v_{10}' \right] \quad (23)$$

bzw. in Bild 5 b die Asymptoten

$$v_2 = v_{20}' \quad (24)$$

und

$$v_1 = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) v_2 + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) v_{20}' \right] \quad (25)$$

besitzen. Die Asymptoten schneiden sich jeweils auf der Winkelhalbierenden.

Bei den beiden Teilbildern des Bildes 5 wurde die Zuordnung der Indizes zu den Koordinatenachsen unterschiedlich gewählt und zwar analog zur funktionalen Beschreibung in den Gln. (17) und (18). Will man die Bilder überlagern, um die Bilder zweier Kanten des Rechtecks Gln. (14) und (15) zu ermitteln, so ist die Zuordnung der Indizes zu den Achsen in beiden Fällen gleich zu wählen. Der Abszisse soll dann der Index »1« zugeordnet werden, so daß Bild 5 b zu spiegeln ist. Mit dieser Zuordnung der Indizes zu den Achsen beschränkt die Vorzeichenkonvention $\Delta v > 0$ die Lösung jeweils auf den unterhalb der Winkelhalbierenden liegenden Ast der Hyperbel. Die Grenze zwischen teilelastischem und streifendem Stoß, der plastische Stoß, wird durch die Bedingungen

$$v_2 = (1 + \mu) v_{10}' - \mu v_1 \quad (26)$$

bzw.

$$v_2 = (1 + \mu) v_{20}' - \mu v_1 \quad (27)$$

beschrieben.

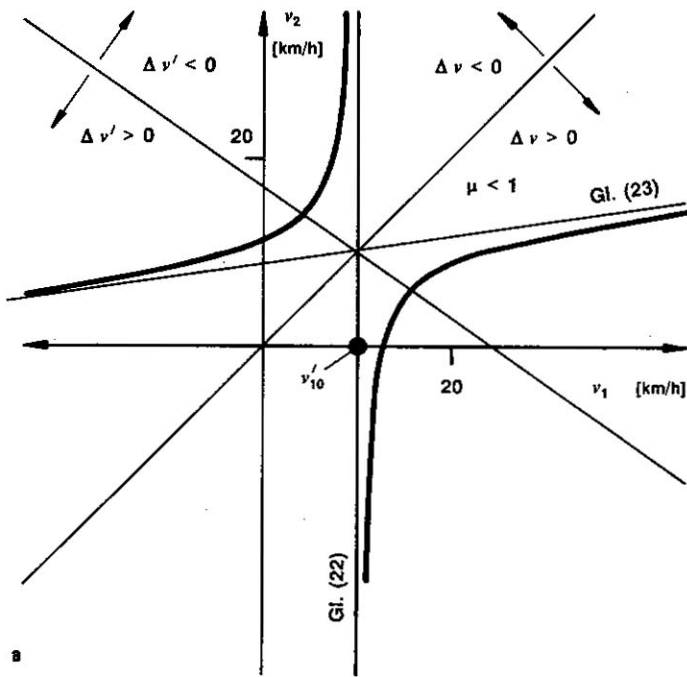


Bild 5 Die Bilder der Geraden $v'_1 = v'_{10} = \text{konst.}$ und $v'_2 = v'_{20} = \text{konst.}$

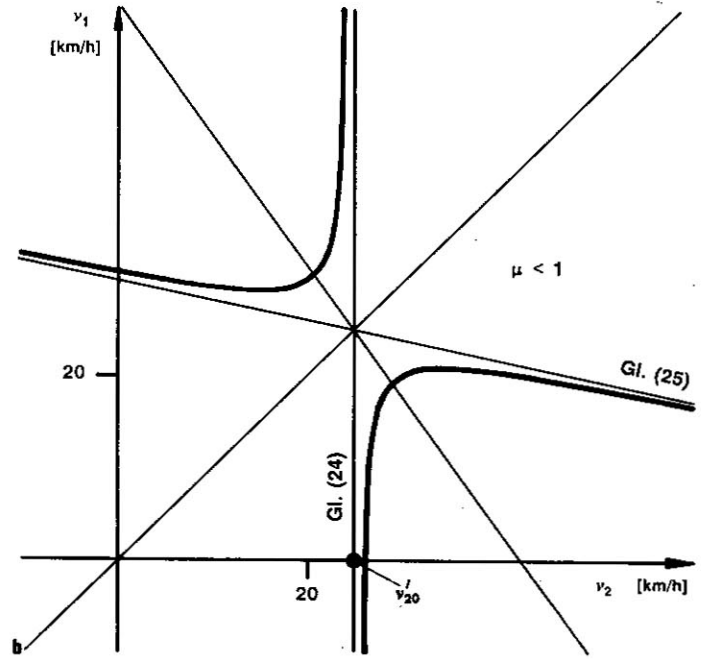


Fig. 5 Mapping of the straight lines $v'_1 = v'_{10} = \text{konst.}$ and $v'_2 = v'_{20} = \text{konst.}$

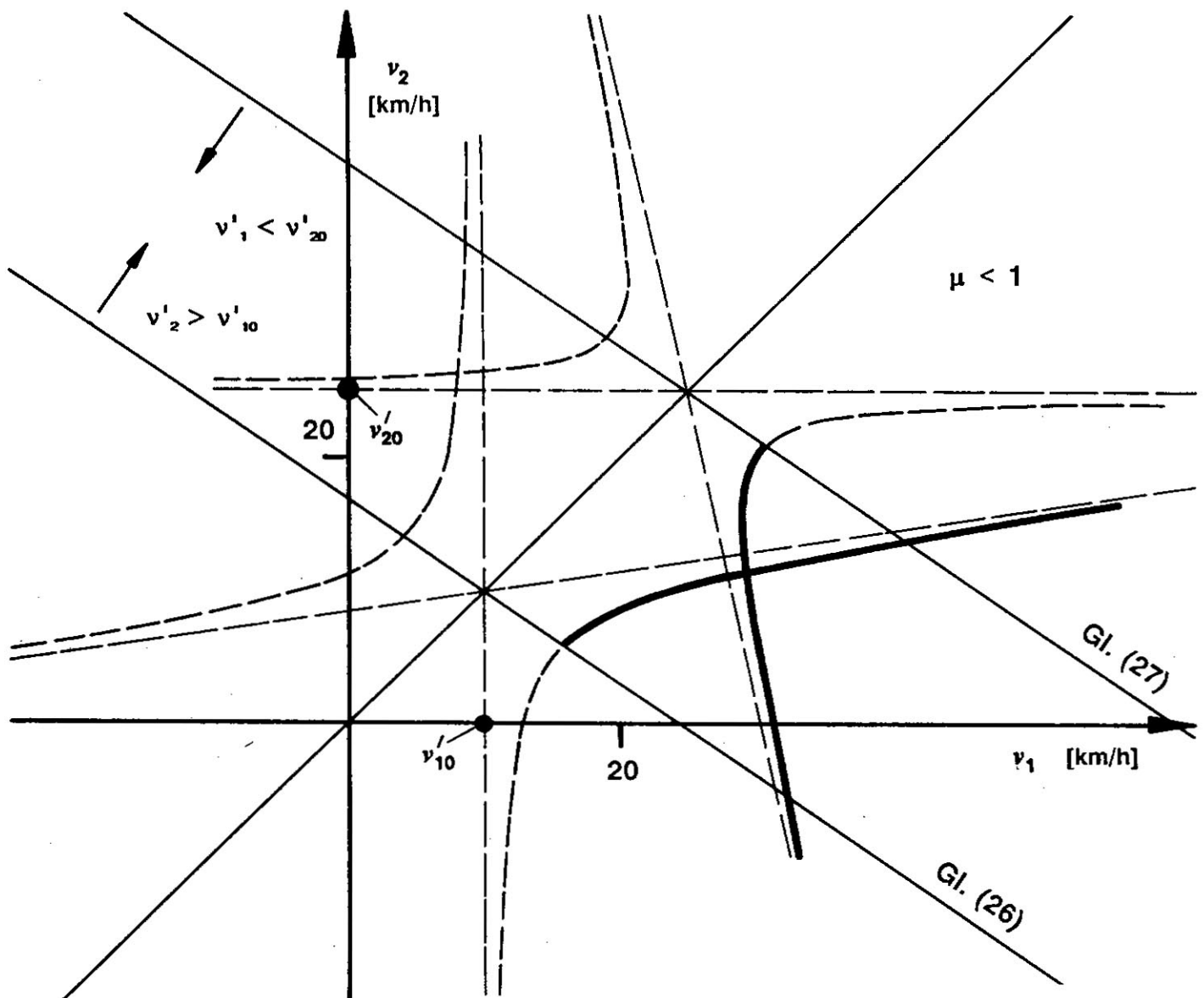


Bild 6 Überlagerung der Darstellungen in Bild 5 für den teilelastischen Stoß unter Berücksichtigung der Vorzeichenkonvention

Fig. 6 Superposition of the mappings Fig. 5. For partial-elastic impact with preservation of the sign convention

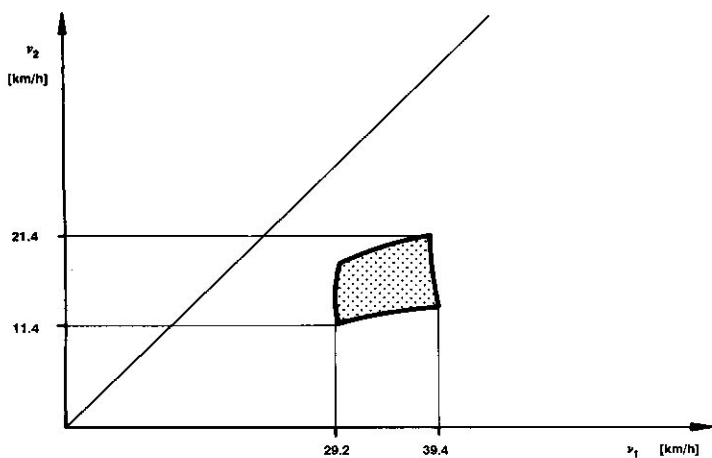


Bild 7 Das vollständige Bild des Vierecks in der v_1, v_2 -Ebene
Fig. 7 Total mapping of the rectangle to the v_1, v_2 -plane

Diese Geraden teilen den Hyperbelast in zwei Teilstücke, von denen eines den teilelastischen, das andere den streifenden Stoß beschreibt. Auch die Geraden Gl. (26) und (27) führen durch den Schnittpunkt der Asymptoten auf der Winkelhalbierenden. Die naheliegende Vermutung, daß es sich bei den Geraden Gl. (26) und (27) und der Winkelhalbierenden um die Symmetrieachsen der Hyperbeln Gl. (17) und (18) handelt, ist allerdings irrig.

Für teilelastische Stöße gilt $\Delta v < 0$. Diese Bedingung wird von dem oberhalb der Geraden Gl. (26) gelegene Teil der Hyperbel Gl. (17) und von dem unterhalb der Geraden Gl. (27) gelegene Teil der Hyperbel Gl. (18) erfüllt. Aus der überlagerten Darstellung der dann verbleibenden Teile der Hyperbeläste ergibt sich **Bild 6**. Der Schnittpunkt der Hyperbeläste ist der Bildpunkt des ersten Eckpunktes des Rechtecks Gl. (14) und (15).

Aus den Gleichungen der Asymptoten Gl. (22) bis (25) ergibt sich, daß eine Veränderung der Parameter v'_{10} bzw. v'_{20} eine Verschiebung der Hyperbeln parallel zur Winkelhalbierenden bewirkt. Als Bild des kompletten Rechtecks ergibt sich damit **Bild 7**. Das Bild weist eine Ähnlichkeit mit dem Originalbild auf. Das ursprüngliche Rechteck wurde durch die Abbildung sozusagen plastisch verformt; die ursprüngliche Form blieb jedoch im Prinzip erhalten. Darin besteht genau die topologische Ähnlichkeit. Die Seiten des Bild-»Rechtecks« sind krummlinig.

Der durch Gl. (18) beschriebene Hyperbelast ist im Falle $\mu < 1$ so gekrümmt, daß sich ein Extremum mit minimalem v_1 -Wert ergibt, vgl. Bild 5 b und Bild 6. Die Lage des Extremwertes läßt sich im teilelastischen Fall zu

$$(v'_{20} - v_2) = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \bar{v}_e \quad (28)$$

und

$$(v_1 - v'_{20}) = \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}} \bar{v}_e = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) (v'_{20} - v_2) \quad (29)$$

errechnen.

Für den Extremwert gilt

$$(v'_1 - v'_{20}) = \Delta v' = (v'_{20} - v_2) \quad (30)$$

und damit

$$\Delta v = \frac{\Delta v'}{\mu} \quad (31)$$

Schneiden die Hyperbeln Gl. (17) die näher zur v_2 -Achse liegende der Hyperbeln Gl. (18) auf »verschiedenen Seiten« des Extremwertes, so liegt der minimale v_1 -Wert nicht auf einer der Ecken des Bild-»Rechtecks«. Mit anderen Worten, er kann aus der Kombination der Minimal- und Maximalwerte der Eingabeparameter v'_1, v'_2, \bar{v}_e nicht berechnet werden. Der analoge Fall ergibt sich unter der Bedingung $\mu > 1$ für den Maximalwert von v_2 . Der für die Abbildungen des vorliegenden Aufsatz-

zes verwendete Parametersatz ist ein Beispiel für den erstgenannten Fall. Der Minimalwert von v_1 liegt nicht auf einem der Eckpunkte, vgl. **Bild 7**.

Fortsetzung folgt ■