K.-H. Schimmelpfennig*, N. Hebing**

Das +/- Problem des EES-Verfahrens

1 Einleitung

1980 wurde von BURG und ZEIDLER das EES-Verfahren vorgestellt [1]. Mit diesem Verfahren kann man die Kollisionsgeschwindigkeiten von Fahrzeugen ermitteln, die im Gegenverkehr zusammengestoßen sind [2].

Bei der Ableitung der Lösungsformel taucht eine quadratische Gleichung auf. Solche Gleichungen führen immer zu zwei Lösungen; sie unterscheiden sich im Vorzeichen. Das positive Vorzeichen ist dann richtig, wenn man einen Gegenverkehrsunfall analysiert. Werden die Formeln aber auf andere Unfälle angewendet, taucht das Problem auf, welches der Vorzeichen zu wählen ist.

Zu diesem Thema wurden von BURG [3] und KIRCHER [4] Lösungsvorschläge unterbreitet.

In diesem Artikel wird versucht, das +/- Problem aus den physikalischen Zusammenhängen zu lösen.

2 Grundidee des EES-Verfahrens

Die Formeln des EES-Verfahrens bauen auf zwei Prinzipien der Physik auf:

der Impulserhaltung und der Energieerhaltung.

Das bedeutet, der Gesamtimpuls I der beteiligten Körper (Fahrzeuge) verändert sich durch eine Kollision nicht. Die kinetische Energie E verringert sich um den Betrag der von den Kollisionkräften geleisteten Arbeit (Deformationsenergie).

Den Gesamtimpuls erhält man, indem man die Impulse ermittelt und vektoriell addiert, die die Fahrzeuge nach der Kollision haben. Die Gesamtenergie errechnet sich aus den kinetischen Energien der Fahrzeuge nach der Kollision und der Deformationsenergie; die kinetischen Energien setzen sich aus dem Rotations- und dem Translationsanteil zusammen.

Die Impulse $\overrightarrow{I_1}$ und $\overrightarrow{I_2}$ der Fahrzeuge vor der Kollision kann man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen, dessen X-Achse durch die Richtung des Impulses von Fahrzeug 1 vor der Kollision gebildet wird, d.h., $I_{1y} = 0$.
Es gilt:

$$I_{1x} + I_{2x} = I_x \tag{1}$$

$$I_{2y} = I_y \tag{2}$$

$$\frac{I^2_{1x}}{m1} + \frac{I^2_{2x}}{m_2} + \frac{I^2_{2y}}{m_2} = 2\,E \tag{3}$$

Durch Kombination der Gleichungen (2) und (3) erhält man:

$$\frac{I^2_{1x}}{m_1} + \frac{I^2_{2x}}{m_2} = 2\,E - \frac{I^2_y}{m_2} = 2\,E_x \tag{4}$$

Wie schon erwähnt, können die Terme, die rechts vom Gleichheitszeichen stehen, bestimmt werden durch die Analyse der Schäden und der Fahrzeugbewegungen nach der Kollision.

*Dipl.-Ing. (TU) K.-H. Schimmelpfennig, Öffentlich bestellter und vereidigter Sachverständiger für Straßenverkehrsunfälle
**Dipl.-Phys. N. Hebing, Sachverständiger im Ing.-Büro Schimmelpfennig und Becke

Die Impulse der Fahrzeuge vor der Kollision und damit die Kollisionsgeschwindigkeiten $\vec{V}_1$ und $\vec{V}_2$ lassen sich nun nach folgendem Schema bestimmen:

Die Y-Komponente des Impulses von Fahrzeug 2 ergibt sich aus Gleichung (2). Die X-Komponenten erhält man aus einer Kombination von Gleichung (1) und (4).

Die Gleichungen (1) und (4) sind die Grundgleichungen des EES-Verfahrens. Wie sie zu lösen sind, soll im folgenden näher beleuchtet werden.

3 Lösung der Grundgleichungen

Die algebraische Lösung lautet:

$$I^{(x,-)}_{1x} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left[I_x \pm \sqrt{2\left(\frac{m_2}{m_1}(m_1 + m_2)\,E_x - \frac{m_2}{m_1}\,I^2_x\right)}\,\right] \tag{5}$$

$$I^{(x,-)}_{2x} = I_x - I^{(x,-)}_{1x} \tag{6}$$

Diese Gleichungen können jetzt auch in einem I_{1x}/I_{2x}-Diagramm dargestellt werden. Anhand dieses Diagramms läßt sich dann diskutieren, unter welchen Bedingungen die +Lösung oder die -Lösung richtig ist.

Grafisch stellt sich Gleichung (1) als eine Gerade mit der Steigung -1 dar, Gleichung (4) als eine Ellipse, deren Hauptachsen durch das Koordinatenkreuz gebildet werden (**Bild 1**).

I_x kann im Verhältnis zu E_x nur solche Werte annehmen, daß die aus Gleichung (1) resultierende Gerade zwischen den Tangenten liegt, die die Ellipse in den Punkten C bzw. C′ berühren. Für diese Punkte gilt: $v_{1x} = v_{2x}$. Das läßt sich leicht zeigen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel in Gleichung (5) gleich 0 gesetzt wird.

Folgende Punkte sind bei der Interpretation der Lösungen zu beachten:

(1) I_{1x} kann definitionsgemäß nur positiv sein.
(2) wenn $I_{2x} < 0$ ist, liegt ein entgegengerichteter Stoß vor, z.B. ein Gegenverkehrsunfall.
(3) Ist $I_{2x} > 0$, liegt ein gleichgerichteter Stoß vor, z.B. ein Auffahrunfall.

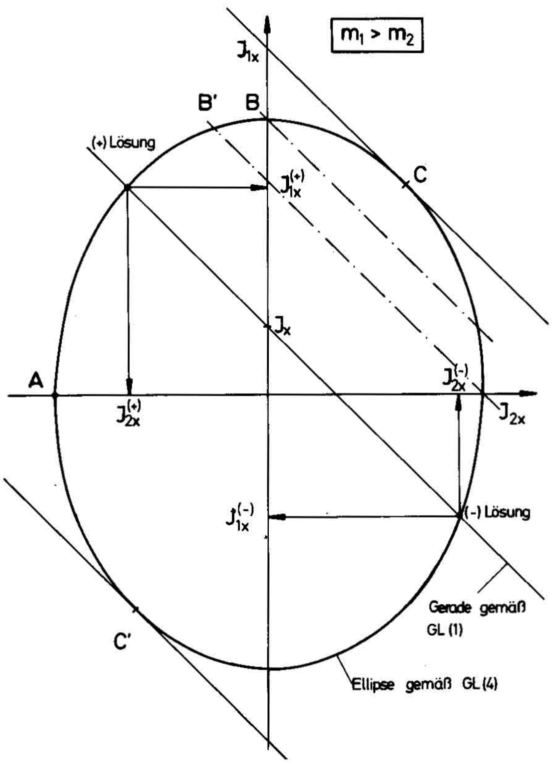

Bild 1 Grafische Darstellung der Lösungsmöglichkeiten

Die beiden Möglichkeiten sind in **Bild 2** skizziert.

Es sind nun verschiedene Lösungsbereiche zu diskutieren:

(a) Die Gerade schneidet die Ellipse zwischen den Punkten C′ und A.
I_{1x} ist in jedem Fall negativ. Fazit: I_x oder E_x wurden offensichtlich falsch bestimmt.
(b) Die Gerade schneidet die Ellipse zwischen den Punkten A und B. Die +Lösung liefert einen positiven Wert für I_{1x} und einen negativen für I_{2x}, d.h., eine entgegengerichtete Kollision.
Für die -Lösung gibt es zwei Möglichkeiten:
– Der Wert für I_{1x} ist negativ. In diesem Fall darf nicht mit der -Lösung gerechnet werden, da I_{1x} nach Definition nur positiv sein kann. (Schnittpunkt zwischen A und B′).
– Der Wert für I_{1x} ist positiv. Dann ist auch I_{2x} positiv, d.h., die Kollision ist gleichgerichtet (Schnittpunkt zwischen B′ und B).
(c) Die Gerade schneidet die Ellipse zwischen den Punkten B und C. In diesem Fall liefert sowohl die +Lösung als auch die -Lösung einen positiven Wert für I_{1x} und für $I_{2x'}$, d.h., eine gleichgerichtete Kollision.
Ausnahme: Für den Fall, daß m_1 kleiner ist als m_2, kann die -Lösung auch negative Werte für I_{1x} liefern.
(d) die +Lösung und die -Lösung unterscheiden sich immer im Kollisionswinkel und im Verhältnis von v_{1x} zu v_{2x}.

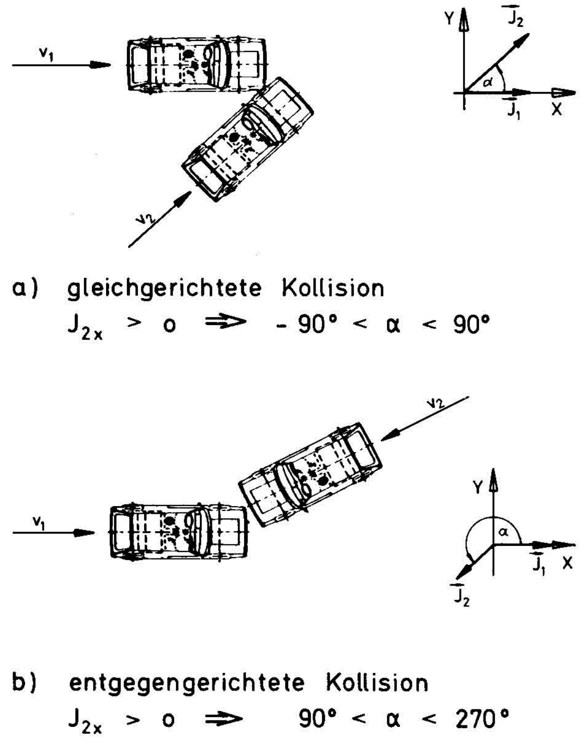

Bild 2 Definition der Kollisionsarten

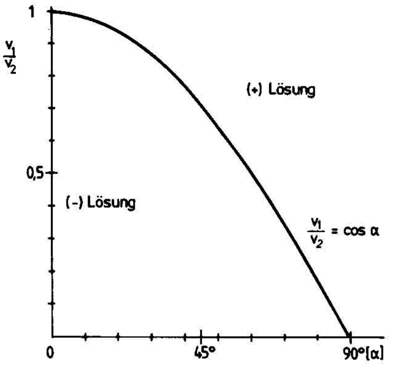

Bild 3 Grenze zwischen + und -Lösung

Es können somit folgende Regeln aufgestellt werden:

Regel 1
Liegt ein entgegengerichteter Stoß vor (Gegenverkehrsunfall) ist immer die +Lösung richtig.

Regel 2
Liegt ein gleichgerichteter Stoß vor, ist die +Lösung dann richtig, wenn $v_1 > v_2 \cos\alpha$ (v_1, v_2 - Beträge der Geschwindigkeiten; α = Kollisionswinkel). Im umgekehrten Fall ist die -Lösung zu wählen. Die Grenze zwischen +Lösung und -Lösung zeigt **Bild 3**.

4 Beispiel

Gegeben sei die Unfallsituation, die im **Bild 4** dargestellt ist. Aus den gegebenen Daten lassen sich die Werte für I_x, I_y und E_x berechnen.

In **Tabelle 1** sind +Lösungen und -Lösungen gegenübergestellt.

Man erkennt, daß die -Lösung die tatsächlich vorgegebene Situation wiedergibt, während die +Lösung ein anderes Ergebnis liefert.

Beide Lösungen führen zu dem gleichen Gesamtimpuls I und der gleichen Gesamtenergie E. Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Werte in die Gleichungen (1) bis (3) einsetzt. Beide Lösungen sind physikalisch möglich. Welche von ihnen aber auf den konkreten Fall zutrifft, kann nur anhand des Kollisionswinkels entschieden werden. Dieser ist bei der +Lösung um 13° verschieden vom vorgegebenen Wert.

Für den Anwender, der nur die +Lösung in seinem Rechner programmiert hat, ergeben sich nun zwei Möglichkeiten:

- Er akzeptiert sein Ergebnis und hält einen Kollisionswinkel von 74° für möglich. Das hat zur Konsequenz, daß die Geschwindigkeit von Fahrzeug 1 doppelt so groß errechnet wird, als sie tatsächlich war.
- Variiert seine Eingabedaten in der Hoffnung, daß sich ein Wert für den Kollisionswinkel einstellt, der dem vorgegebenen Winkel näher kommt. Da er aber dann zwangsläufig falsche Eingabedaten einsetzt, werden die Werte für die Kollisionsgeschwindigkeiten noch weiter von den tatsächlichen abweichen.

Die richtige Lösung erhält man in diesem Beispiel nur, wenn man mit dem Minuszeichen vor der Wurzel rechnet.

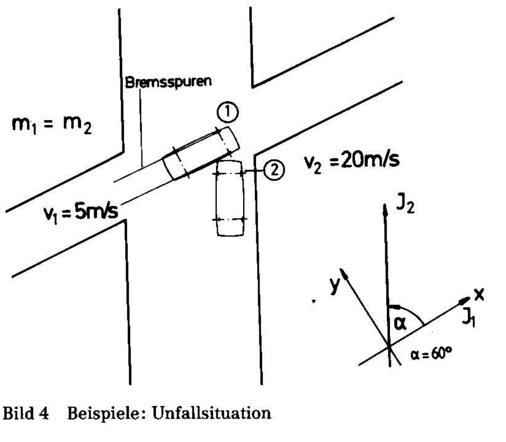

Bild 4 Beispiele: Unfallsituation

	+Lösung	-Lösung
$v_{1x} = v_1$	10m/s	5m/s
v_{2x} =	5m/s	10m/s
v_{2y} =	17,32m/s	17,32m/s (≈ 20sin 60°)
v_2 =	18,03m/s	20m/s
α =	74°	60°

Tabelle 1 Beispiel: Lösungen

5 Zusammenfassung

Es können folgende Regeln aufgestellt werden:

Regel 1
Bei einer entgegengerichteten Kollision (Kollisionswinkel zwischen 90° und 270°) ist die +Lösung anzuwenden; die bisher veröffentlichten Formeln können angewendet werden.

Regel 2
Liegt eine gleichgerichtete Kollision vor (Kollisionswinkel zwischen +90° und -90°) ist die -Lösung zu wählen, wenn bekannt ist, daß:

$$v_1 < v_2 \cos \alpha$$

Andernfalls sind beide Möglichkeiten zu untersuchen; die Lösungen unterscheiden sich dann im Kollisionswinkel.

Regel 3
Bei einem Auffahrunfall ist das auffahrende Fahrzeug mit »1« zu kennzeichnen, um das Pluszeichen verwenden zu können ($v_1 > v_2$). (Spezialfall zu Regel 2)

Regel 4
Bei einem Kreuzungsunfall ($\alpha \approx$ -90° oder $\alpha \approx$ 90°) sind ebenfalls beide Lösungen zu berechnen, da zunächst nicht entschieden werden kann, welche Kollisionsart vorliegt.

Die in [5] und [6] veröffentlichten Verfahren zur Berechnung der Kollisionsgeschwindigkeit kennen das +/- Problem nicht.

Literatur

[1] Burg, H., Zeidler, F.: EES – Ein Hilfsmittel zur Unfallrekonstruktion und dessen Auswirkung auf die Unfallforschung.
Der Verkehrsunfall 1980, S. 75

[2] Zeidler, F.: Die Analyse von Straßenverkehrsunfällen mit verletzten Pkw-Insassen unter besonderer Berücksichtigung von versetzten Frontalkollisionen mit Abgleiten der Fahrzeuge.
Dissertation TU Berlin 1982

[3] Burg, H.: Rechnerunterstützte Rekonstruktion von Pkw/Pkw-Unfällen
Dissertation TU Berlin 1984

[4] Kircher, K.: Die rechnerische Bestimmung der Kollisionsgeschwindigkeiten
Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik 1985, S. 157

[5] Schimmelpfennig, K.-H., Becke, M.: Ausnutzung der Symmetriebedingungen beim Impuls-Diagramm zur engeren Eingrenzung der Kollisionsgeschwindigkeiten unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Drallsatzes.
Der Verkehrsunfall 1980, Heft 10

[6] Schimmelpfennig, K.-H., Hebing, N.: Das Energie-Ring-Verfahren
Graphische Lösung der Stoßgleichung unter Einbeziehung der Formänderungsenergie
Der Verkehrsunfall, 1982, Heft 9

■